# Teorie distribucí

**Definice 1** (prostory $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\mathcal{D}'(\Omega)$)**.** *Pro $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřenou definujeme $\mathcal{D}(\Omega)$ (prostor testovacích funkcí na $\Omega$) jako prostor všech (reálných či komplexních) funkcí $f \in C^\infty(\Omega)$ s kompaktním nosičem (tj.* $\operatorname{supp} t = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ *je kompaktní podmnožina $\Omega$).*

*Říkáme, že posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konverguje k $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ v prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ (značíme $\varphi_n \stackrel{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi$) pokud existuje $K \subset \Omega$, že*

1. $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ *pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a* $\operatorname{supp} \varphi \subset K$,
2. $D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ *pro každý multiindex $\alpha$.*

*Prostor $\mathcal{D}'(\Omega)$ definujeme jako prostor všech lineárních zobrazení (funkcionálů) $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, která jsou spojitá v následujícím smyslu: pokud $\varphi_n \stackrel{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi$, potom $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$, $n \to \infty$. Funkciánály patřící do $\mathcal{D}'(\Omega)$ nazýváme distribuce na $\Omega$.*

**Poznámky a příklady.**

1. *podmínka $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ kdykoliv $\varphi_n \stackrel{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi$ je (díky linaritě) ekvivalentní podmínce $T(\varphi_n) \to 0$ kdykoliv $\varphi_n \stackrel{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0$.*
2. *místo $T(\varphi)$ budeme často psát $\langle T, \varphi \rangle$.*
3. *pro $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (tedy $f \in L^1(K)$ pro každý kompakt $K \subset \Omega$) definujeme distribuci $T_f(\varphi) = \int f\varphi$.*

   *Obecněji pro každou Radonovu míru $\mu$ můžeme definovat distribuci $T_\mu(\varphi) = \int \varphi \, d\mu$.*

   *Ještě obecněji pro $\alpha$ multiindex je $\varphi \mapsto \int D^\alpha \varphi \, d\mu$ distribuce.*
4. *Základním příkladem distribuce reprezentující míru je Diracova distribuce v bodě $b \in \mathbb{R}^d$ definovaná jako $T_{\delta_b}(\varphi) = \int f \, d\delta_b = \varphi(b)$.*
5. *pro funkci $f$ mající integrál ve smyslu hlavní hodnoty můžeme definovat jí odpovídající distribuci $T_{p.v.f}(\varphi) = p.v. \int f\varphi$. Například*

$$T_{p.v.\frac{1}{x}}(\varphi) = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \right) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}.$$

## Základní operace na distribucích

**Definice 2** (posunutí, škálování derivace a nísobení funkcí v $\mathcal{D}'(\Omega)$)**.** *Pro $T \in D'(\Omega)$ definujeme*

1. *posunutí $T$ o $a \in \mathbb{R}^d$ jako $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle$, kde $\tau_a \varphi(x) = \varphi(x+a)$ (pouze pro $\Omega = \mathbb{R}^d$),*
2. *škálování $T$ koeficientem $\lambda > 0$ jako $\langle s_\lambda T, \varphi \rangle = \langle T, \frac{1}{\lambda^d} s_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \rangle$, kde $s_\lambda \varphi(x) = \varphi(\lambda x)$ (pouze pro $\Omega = \mathbb{R}^d$)*

*3. derivaci $T$ vzhledem k multiindexu $\alpha$ jako $\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = \langle T, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi\rangle$,*

*4. násobení $T$ funkcí $h \in C^\infty(\Omega)$ jako $\langle hT, \varphi\rangle = \langle T, h\varphi\rangle$.*

**Poznámky a příklady.** *1. Platí $x\delta = 0$ a $xT_{v.p.\frac{1}{x}} = 1$.*

*2. Nechť $h = \chi_{[0,\infty)]}$. Potom $(T_h)' = \delta$ a obecněji*

$$\langle (T_h)^{(k+1)}, \varphi\rangle = \langle (\delta)^{(k)}, \varphi\rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0).$$